جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

# دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی

## مرحله اول

## بیستمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۸

| تعداد سوالات | | مدت آزمون (دقیقه) |
|---|---|---|
| سوالات چند گزینه‌ای | مسأله‌های تشریحی | |
| ۲۵ | – | ۱۸۰ |

**توضیحات مهم**

**استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

### تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۵ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

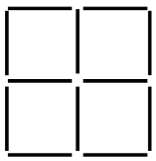
www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- تعدادی دستمال مستطیل شکل، روی یک میز سفید افتاده‌اند. از بالا که با این دستمال‌ها نگاه می‌کنیم، شکلی شبیه شکل سمت چپ را تشکیل می‌دهند. حداقل تعداد دستمال‌ها چند تاست؟

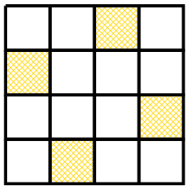
الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۲- یک جدول ۲ × ۲ مانند شکل روبه رو داده شده است. این جدول با استفاده از ۱۲ چوب کبریت به طول واحد ساخته شده است. به چند طریق می‌توان ۲ چوب کبریت را رنگ کرد، به طوری که چوب کبریت‌های رنگ شده با هم برخورد نداشته باشند؟ دو چـــوب کبریت با هم برخورد دارند اگر رأس مشترک داشته باشند.



الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۲ د) ۵۴ هـ) ۶۴

۳- شکل زیر جزیره‌ای را نشان می‌دهد که ۱۶ خانه دارد. مساحت هر خانه هم یک واحد است. ۴ تا از این خانه‌ها در شکل مشخص شده‌اند حاوی معدن طلا هستند.



یک "مزرعه"، یک مستطیل روی این جزیره است که اضلاع آن دقیقاً روی مرزهای خانه‌ها قرار دارد و مساحت آن حداقل یک واحد است. ارزش یک مزرعه برابر تعداد معادن طلای داخل آن است. برای مثال، ارزش مزرعه‌ی شامل سه ستون سمت چپ و دو سطر بالایی (به مساحت ۶) برابر ۲ و ارزش مزرعه‌ای که شامل تمام خانه‌های جدول باشد، برابر ۴ است.

مجموع ارزش‌های تمام مزرعه‌های متفاوت این جزیره کدام است؟

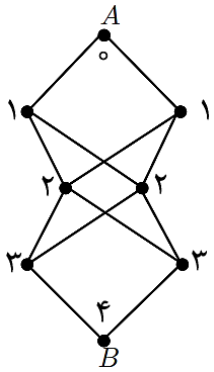
الف) ۱۰۴ ب) ۲۴ ج) ۲۴۰ د) ۱۲۰ هـ) ۹۶

۴- سعید و حسام بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا، سعید یک عدد طبیعی و دو رقمی $n$ را نزد خودش انتخاب می‌کند. پس از آن و در هر مرحله، حسام یک عدد طبیعی یک رقمی مثل $k$ به همراه یک بطری نوشابه به سعید می‌دهد و سعید در ازای آن، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $n$ (عدد خودش) بر عدد $k$ را به حسام می‌گوید.

فرض کنید حسام به اندازه‌ی کافی باهوش است. او در ابتدای کار حداقل چند بطری نوشابه باید همراه داشته باشد تا مطمئن شود که با آن تعداد بطری، هم‌واره می‌تواند عدد سعید را حدس بزند؟

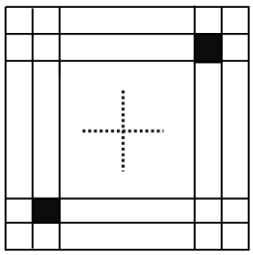
الف) ۲ بطری ب) ۳ بطری ج) ۴ بطری د) ۵ بطری هـ) ۹ بطری

۵- در شکل روبه رو به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت به‌طوری که هریک از اعداد ۰ تا ۴ دقیقاً یک‌بار در طول مسیر در نقطه‌ها مشاهده شوند؟




الف) ۴ ب) ۷ ج) ۸ د) ۱۵ هـ) ۱۶

۶- خانه‌های (۲,۲) و (۹۹,۹۹) یک جدول ۱۰۰×۱۰۰ سیاه و بقیه خانه‌های آن سفید هستند. این جدول در شکل روبرو نشان داده شده است. بعد از گذشت ۱ ثانیه تمام خانه‌های مجاور یک خانه سیاه، سیاه می‌شوند. دو خانه مجاور هستند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. بعد از چند ثانیه تمام خانه‌های جدول سیاه خواهند شد؟



الف) ۹۶ ب) ۹۷ ج) ۹۸ د) ۹۹ هـ) ۱۰۰

۷- الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- عدد x را از ورودی بگیر.
- عدد a را برابر صفر قرار بده.
- تا زمانی که عدد x بزرگ‌تر از صفر است، کارهای زیر را انجام بده:
  - باقی مانده‌ی تقسیم x بر ۲ را در k بریز.
  - اگر k برابر صفر است، به مقدار a یک واحد اضافه کن.
  - x را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- مقدار a را به عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال، اگر به این الگوریتم عدد ۹ را بدهیم خروجی مقدار ۲ را بر می‌گرداند. اکنون فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ را یکی یکی به این الگوریتم می‌دهیم و هر بار خروجی الگوریتم را یادداشت می‌کنیم. بزرگ‌ترین عددی که یادداشت می‌کنیم، چند است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۲۰ هـ) ۶۹۴

۸- یک جای‌گشت مرتبه‌ی $n$ دنباله‌ای (ترتیبی) از اعداد ۱ تا $n$ است. برای مثال (۳,۱,۴,۲) یک جای‌گشت مرتبه‌ی ۴ است. جدول ضرب یک جای‌گشت $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ یک جدول $n \times n$ است که مقدار خانه‌ی سطر $i$ اُم و ستون $j$ اُم آن برابر $p_i \times p_j$ می‌باشد. برای مثال، جدول ضرب جای‌گشت (۳,۱,۲) به صورت شکل مقابل است.

| | | |
|---|---|---|
| ۹ | ۳ | ۶ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۶ | ۲ | ۴ |

آیدا و آیدین بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا آیدین از اتاق بیرون می‌رود و آیدا یک جای‌گشت مرتبه ۸ انتخاب می‌کند و جدول ضرب آن را می‌نویسد و بر روی هرکدام از ۶۴ خانه‌ی جدول یک سکه می‌گذارد.

آیدین به اتاق بر می‌گردد و $k$ تا از خانه‌های جدول را انتخاب می‌کند و از آیدا می‌خواهد تا سکه‌های آن $k$ خانه را هم‌زمان از روی صفحه بردارد. بعد از انجام این‌کار، اگر آیدین بتواند جای‌گشت آیدا را دقیقاً تعیین کند، برنده می‌شود. کم‌ترین مقدار $k$ که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۹- همان مسئله‌ی قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که اولاً، مرتبه‌ی کار به جای ۸، برابر ۳ است. ثانیاً، آیدا به جای یک جای‌گشت، دو جای گشت مانند $P = (p_1, p_2, p_3)$ و $Q = (q_1, q_2, q_3)$ را انتخاب می‌کند و عدد سطر $i$ اُم و ستون $j$ اُم جدول برابر $p_i \times q_j$ است. برای مثال، جدول ضرب دو جای‌گشت $P$ = (۱,۳,۲) و $Q$ = (۲,۱,۳) مطابق شکل مقابل است.

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۶ | ۳ | ۹ |
| ۴ | ۲ | ۶ |

آیدین در صورتی در این مسئله برنده می‌شود که بتواند هر دو جای‌گشت $P$ و $Q$ را حدس بزند. کم‌ترین مقدار $k$ که آیدین بتواند همواره برنده بشود چند است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۱۰- دو چند جمله‌ای $x^{۲۰} - x^{۱۹} + x^{۱۸} - \ldots + x^{۲} - x^{۱} + ۱$ و $x^{۲۰} + x^{۱۹} + x^{۱۸} + \ldots + x^{۲} + x^{۱} + ۱$ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. اگر مجموع ضرایب چند جمله‌ای حاصل $A$ باشد، باقی مانده‌ی $A$ بر ۵ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۱- اعداد زوج را از چپ به راست پشت سرهم می‌نویسیم. ۱۳۸۸ اُمین رقم این دنباله چیست؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) ۹

۱۲- در یک زمستان سرد، خرس قطبی ۸۸ قطعه گوشت دقیقاً به اندازه‌های ۱، ۲، تا ۸۸ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه گوشت‌ها را به صورت تصادفی (و با احتمال برابر) انتخاب می‌کند. اگر اندازه‌ی گوشت عدد فردی بود، آن را کاملاً می‌خورد. اگر زوج بود، آن را دقیقاً نصف می‌کند، یک نصف آن را می‌خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می‌دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می‌میرد. با این الگوریتم، خرس ما چند روز می‌تواند زنده بماند؟

الف) ۸۵ روز ب) ۸۷ روز ج) ۸۸ روز د) ۱۷۳ روز هـ) ۱۷۵ روز

۱۳- فرض کنید که در مربع ۳ × ۳ روبه رو اعداد ۱ تا ۹ را طوری قرار داده‌ایم که حاصل‌جمع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر شود. کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند در گوشه‌ی سمت چپ بالا قرار گیرد؟

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) ۹

۱۴- بین شهرهای یک کشور لوله‌های آب قرار داده‌ایم. میزان انتقال آب روی هر لوله هم مشخص است. "قدرت" یک شهر را برابر تفاوت میزان آب خروجی از آن شهر و میزان آب ورودی به آن تعریف می‌کنیم. قدرت یک شهر ممکن است عددی منفی یا مثبت باشد، بسته به این‌که آن شهر تولید کننده‌ی آب باشد یا فقط مصرف کننده‌ی آب. مثلاً اگر قدرت یک شهر ۶- و میزان آب ورودی به آن شهر ۱۰۲ لیتر باشد میزان آب خروجی (از طریق لوله‌هایی که از آن شهر به شهرهای دیگر خارج شده است) ۹۶ لیتر خواهد بود.

در یک کشور با ۵ شهر، فرض کنید باقی مانده قدرت چهار شهر اول تقسیم بر ۱۱ به ترتیب اعداد ۳, ۹, ۷, ۱ باشد. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند قدرت شهر پنجم باشد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۰۰۰ ج) ۵۰۰۰ د) ۷۰۰۰ هـ) ۹۰۰۰

۱۵- رولت روسی یک بازی مرگ‌بار است که طی آن هر شرکت کننده یک یا چند گلوله در هفت‌تیر قرار می‌دهد و بعد از چرخاندن تصادفی خشاب، لوله‌ی هفت‌تیر را بر روی شقیقه خود قرار داده و ماشه را می‌کشد. خشاب این هفت‌تیر به صورت دایره است که جای ۷ گلوله دارد و بعد از کشیدن ماشه، خشاب به صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. در یک بازی شخصی ۳ گلوله را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان در خشاب با ظرفیت ۷ گلوله قرار می‌دهد و پس از چرخاندن خشاب، ۲ بار پیاپی شلیک می‌کند، احتمال زنده ماندنش چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۷}$ ب) $\frac{۱۲}{۴۹}$ ج) $\frac{۴}{۷}$ د) $\frac{۱۶}{۴۹}$ هـ) $\frac{۲}{۷}$

۱۶- بر روی یک عدد ۱۶ بیتی $a_۱a_۲ \dots a_۷a_۸$ دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

- شیفت: تغییر آن به $a_۲a_۳ \dots a_۸a_۱$
- تبدیل: تغییر آن به $a_۱\bar{a}_۲ \dots a_۷a_۸$ که $\bar{x}$ بیت $x$ را اگر ۰ باشد به ۱ و اگر ۱ باشد به ۰ تغییر می‌دهد.

با چند تا از این دو عمل می‌توانیم ۱۰۰۰۰۰۱۰ را به ۱۱۱۱۰۰۰۰ تبدیل کنیم؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

۱۷- آرایه‌ی $A[۱..۸]$ داده شده است. بر روی آن الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۱) در ابتدا $i$ را برابر ۱ قرار بده و به خط ۲ برو

۲) اگر $A[i] = i$ به خط ۴ برو و اگر $A[i] \neq i$ به خط ۳ برو

۳) $A[i]$ را با $A[A[i]]$ تعویض کن و به خط ۲ برو

۴) $i$ را یک واحد افزایش بده و اگر $i$ کوچک‌تر یا مساوی ۸ است به خط ۲ برو. اگر $i$ بزرگ‌تر از ۸ است به خط ۵ برو.

۵) آرایه‌ی $A$ را چاپ کن

اگر $A[۱..۸] = (۸,۵,۳,۴,۶,۱,۲,۷)$ باشد، خروجی این الگوریتم چیست؟

الف) (۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸)

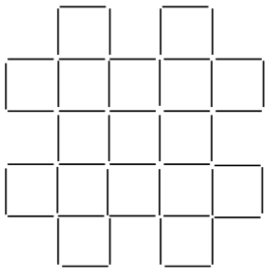
ب) (۱,۲,۴,۳,۵,۶,۷,۸)

ج) (۱,۲,۳,۴,۵,۷,۶,۸)

د) (۲,۱,۳,۴,۵,۶,۷,۸)

هـ) (۸,۶,۳,۴,۶,۱,۲,۷)

۱۸- در شکل مقابل که با ۴۸ عدد چوب کبریت ساخته شده است، حداقل چند چوب کبریت باید برداشته شود تا هیچ مربعی دیده نشود؟

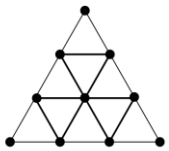


الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۶

۱۹- فرض کنید آرایه‌ای به طول ۱۰۰۰ از بیت‌های ۰ و ۱ داریم. می‌گوییم این آرایه "۰-غالب" است اگر دست‌کم ۹۰٪ اعداد آن ۰ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۱ باشد). هم‌چنین آرایه "۱-غالب" است اگر دست‌کم ۹۰٪ اعداد آن ۱ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۰ باشد). می‌دانیم که آرایه یا ۰-غالب است یا ۱-غالب، ولی نمی‌دانیم کدام‌یک. چند تا از درایه‌های این آرایه را باید بررسی کنیم تا به‌طور قطع بتوانیم بگوییم که آرایه ۰-غالب است یا ۱-غالب؟

الف) ۱۹۱ ب) ۲۰۱ ج) ۲۱۰ د) ۵۰۱ هـ) ۹۰۱

۲۰- حداکثر چند تا از نقطه‌های توپر در شکل مقابل را می‌توان با سفید رنگ کرد تا نقطه‌های سفید رئوس، یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل ندهند.



الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۲۱- ۶ عدد متفاوت داده شده است. با چند تا مقایسه بین این اعداد می‌توان کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد را یافت؟ بهترین جواب را مشخص کنید.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ هـ) ۱۱

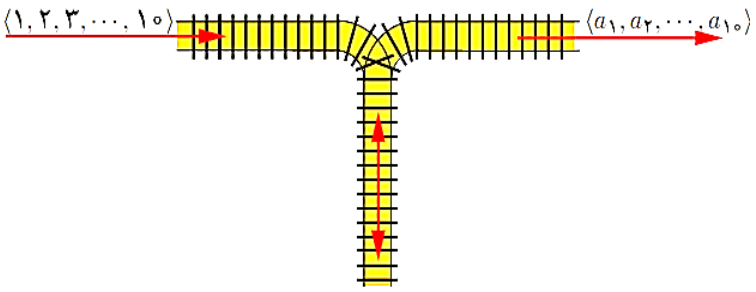
۲۲- افراد با شماره‌های ۱ تا ۶ به ترتیب دور میز دایره‌ای شکل و در جهت ساعت‌گرد نشسته‌اند و هریک ورقه‌ای دارند که بر روی آن یک عدد نوشته شده است (عدد فرد شماره‌ی $i$ را $A[i]$ می‌نامیم). الگوریتم زیر را ۱۳۸۸ مرحله تکرار می‌کنیم:

۱) هر فرد با شماره‌ی فرد ورقه‌اش را با نفر کناری‌اش (در جهت ساعت‌گرد) مقایسه می‌کند. خود عدد کوچک‌تر و نفر کناری‌اش عدد بزرگ‌تر را بر می‌دارد.

اگر $A[1 .. 6]$ = (۲,۴,۵,۶,۸,۹) باشد، بعد از اجرای ۱ مرحله $A[1 .. 6]$ = (۹,۵,۴,۸,۶,۲) خواهد بود. بعد از اجرای ۱۳۸۸ مرحله ورقه‌ای که عدد ۲ روی آن نوشته شده است در دست کدام فرد خواهد بود؟

الف) شماره‌ی ۱ ب) شماره‌ی ۲ ج) شماره‌ی ۴ د) شماره‌ی ۵ هـ) شماره‌ی ۶

۲۳- یک ردیف از قطار با شماره‌های ۱ تا ۱۰ پشت سرهم مطابق شکل زیر قرار دارند. این ردیف با دنباله‌ی (۱,۲,۳, ... ,۱۰) نمایش می‌دهیم. قطار ۱ آخرین قطار است. بین ریل ورودی و ریل خروجی ریلی به نام "پارکینـــگ" دقیقاً مطابق زیر قرار گرفته است. هر قطار برای آن‌که در ریل خروجی ظاهر شود باید ابتدا به پارکینگ وارد شود. همیشه هم آخرین قطار موجود در پارکینگ دنده عقب به خروجی منتقل می‌شود. با این ترتیب در خروجی یک دنباله از قطارها (به ترتیب از راست به چپ) ظاهر خواهد شد که با ( $a_1$ , $a_2$ ... , $a_{10}$ ) نشان می‌دهیم و به آن دنباله‌ی "قابل تولید" می‌گوییم. دقت کنید که $a_1$ آخرین قطاری است که خارج می‌شود. چند تا از دنباله‌های زیر قابل تولید هستند؟




- (۱۰,۹,۸,۷,۴,۶,۳,۲,۱,۵)
- (۹,۹,۱,۶,۷,۵,۱,۳,۲,۱۰)
- (۸,۶,۷,۱,۱۰,۵,۴,۳,۹,۲)
- (۱۰,۹,۸,۱,۷,۶,۵,۳,۲,۴)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

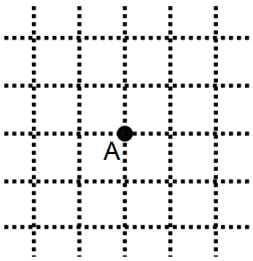
۲۴- بر روی یک جای‌گشت ($a_8a_7$ ... $a_2a_1$) می‌توانیم دو عمل زیر را انجام دهیم:

- عمل اول: تغییر آن به ($a_8a_6a_4a_2a_7a_5a_3a_1$)
- عمل دوم: تغییر آن به ($a_8a_4a_7a_3a_6a_2a_5a_1$)

فرض کنید جای‌گشت اولیه (۸,۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱) است. عدد i را طلایی گوییم اگر با استفاده از دو عمل بالا بتوان جای‌گشتی تولید کرد که $a_i$ = ۲ باشد. تعداد اعداد طلایی چند تاست؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۸

۲۵- همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است فردی در نقطه A قرار دارد. او در هر حرکت به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت راست و به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت چپ می‌رود. احتمال این‌که بعد از ۷ حرکت فاصله او از نقطه‌ی A بیش‌تر از ۳ باشد چه‌قدر است؟

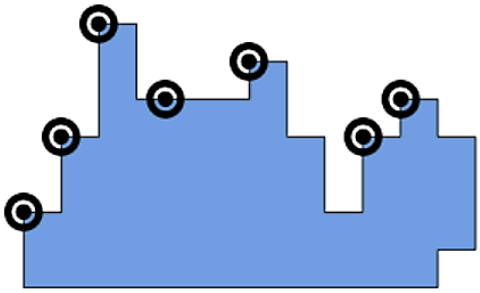



الف) $\frac{۱}{۱۶}$ ب) $\frac{۱۴}{۱۲۸}$ ج) $\frac{۵۸}{۱۲۸}$ د) $\frac{۱}{۸}$ هـ) $\frac{۵۶}{۲۵۶}$

## «پاسخنامه تشریحی»

۱- **گزینه‌ی (د) درست است.**

برای پر کردن شکل، باید نقاط مشکی نیز پر شوند. ولی هیچ دو نقطه‌ای از آنها نمی‌تواند در یک دستمال قرار گیرد. در نتیجه حداقل ۷ دستمال لازم است. از طرفی روشی وجود دارد که می‌توان با ۷ دستمال تمام شکل را پر کرد. پس در مجموع ۷ دستمال لازم و کافی است.



۲- **پاسخ درست در میان گزینه‌ها نیست.**

برای هرکدام از چوب کبریت‌ها فرض می‌کنیم که رنگ شده باشد و تعداد حالاتی را می‌توان چوب کبریت دوم را انتخاب کرد بدست می‌آوریم. در نهایت چون هر حالت را دو بار شمردیم جواب را بر دو تقسیم می‌کنیم.

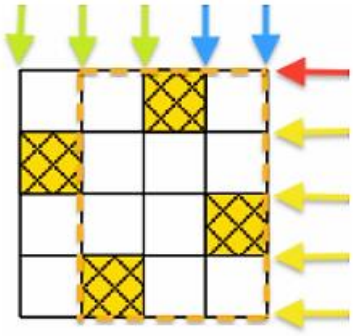
برای هر ۴ چوب کبریت وسطی ۶ حالت انتخاب و برای هر ۸ چوب کبریت محیطی ۸ حالت داریم که در کل می‌شود ۶۴+۲۴. پس جواب مساله برابر نصف این عدد یعنی ۴۴ خواهد بود که در گزینه‌ها نیست.

۳- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

در یک روش می‌توان مسأله را به چند بخش تقسیم کنیم که در هر گام تعداد مزرعه‌ها با ۱ تا ۴ معدن را شمرده و در نهایت آنها را با ضریبشان با هم جمع کنیم.

اگر از نگاهی دیگر به مسأله نگاه کنیم می‌توانیم برای هر معدن طلا تعداد مزارع مستطیلی شامل آن را بشماریم. به دلیل تقارن شکل کافی است فقط یکی از معادن را بدست آورده و در ۴ ضرب کنیم.

برای این کار تعداد مستطیل‌هایی را که معدن بالایی در آن قرار دارد را می‌خواهیم بشماریم. ۳ حالت برای بدست آوردن یکی از ضلع‌های عمودی و ۲ حالت برای انتخاب ضلع دیگر داریم که معدن در مستطیل قرار بگیرد. برای ضلع‌های افقی مستطیل هم ۱ حالت برای ضلع بالایی و ۴ حالت برای انتخاب ضلع پایینی داریم که در کل برابر است با ۳×۲×۱×۴ که ۲۴ حالت می‌شود. حال چون ۴ معدن داریم تعداد کل برابر ۲۴×۴ یعنی ۹۶ می‌باشد.



۴- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

طبق قضیه‌ی باقیمانده‌ی چینی اگر اعداد صحیح دو به دو نسبت به هم اول $n_1$ تا $n_k$ برای دستگاه معادلات زیر وجود داشته باشند آنگاه جواب‌های $x$ به پیمانه‌ی $N = \prod_1^K n_i$ با یکدیگر برابرند.

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{n_2}$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \pmod{n_k}$$

با این توضیح، باید ضرب اعداد اولیه بزرگتر از ۱۰۰ باشد. در غیر این‌صورت دو عدد باقیمانده‌های یکسان یافت می‌شوند و در نتیجه تشخیص عدد ممکن نیست. چون تمامی اعداد تک رقمی هستند حداقل سه عدد لازم است و اعداد ۷، ۸ و ۹ ویژگی مورد نظر ما را دارند. در نتیجه پاسخ گزینه‌ی ب است.

۵- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

باید اعداد را به ترتیب صعودی طی کنیم زیرا در غیر این صورت از هر عدد دقیقاً یک‌بار نمی‌توانیم بگذریم و عدد تکراری خواهیم داشت. حال برای یافتن از هر عدد به عدد بعدی مستقل از اینکه در کدام راس قرار داریم (به جز رئوس ابتدا و انتها) دو راه داریم پس در کل $2^3$ یعنی ۸ مسیر وجود دارد.

۶- **گزینه‌ی (د) درست است.**

کافی است فاصله‌ی دورترین خانه را تا خانه‌های سیاه بدست آوریم. خانه‌های سیاه به مختصات $(C,C)$ وجود دارند که $C = 2.99$. حال اگر بخواهیم $(X,Y)$ ای را بیابیم که $Y-C$ و $X-C$ بیشینه شوند و همه اعداد کوچکتر از ۱۰۰ باشند یکی از نقاط، نقطه‌ی (۱.۱۰۰) می‌باشد که برای رسیدن از هرکدام از نقاط سیاه به آن حداقل ۹۹ مرحله باید طی شود. در ضمن با ۹۹ مرحله تمامی خانه‌ها سیاه می‌شوند در نتیجه گرینه‌ی د درست است.

۷- **گزینه (ب) درست است.**

اگر عدد $x$ را در مبنای دو در نظر بگیریم گام‌های اول و دوم داخل حلقه باعث می‌شوند که اگر کم ارزش‌ترین رقم عدد $x$ صفر بود یکی به $a$ اضافه شود و گام سوم باعث می‌شود که رقم کم ارزش عدد در مبنای دو حذف شود. این سیکل در انتها تعداد رقم‌های صفر عدد را به عنوان خروجی می‌دهد. از بین اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ عدد $2^{10}$ بیشترین تعداد یعنی ۱۰ صفر در مبنای دو دارد.

۸- **گزینه (ج) درست است.**

۶ سوال لازم و کافی است.

مثال: فرض کنید ضرب عدد اول با اعداد سوم و چهارم را بپرسیم. همچنین ضرب عدد دوم با اعداد پنجم تا هفتم را بپرسیم و در نهایت ضرب اعداد هفتم و هشتم را نیز بپرسیم (در مجموع شش پرسش انجام داده‌ایم).

اگر چهار پرسش اول را در پرسش ششم ضرب کنیم و حاصل را $P$ بنامیم، داریم:

$$P = p_1^2 \times p_2^2 \times p_3 \times \ldots \times p_8$$

در نتیجه اگر عدد حاصل را بر $8!$ تقسیم کنیم حاصل برابر $p_1 \times p_2$ می‌شود. حال اگر هر سه پرسش با جایگشت متفاوت را در هم ضرب کنیم ضرب دو عنصر دیگر(همانند قبلی) بدست می‌آید. بدین ترتیب می‌توان ضرب اعداد سوم و چهارم با اعداد پنجم و ششم را متوجه شد.

به همین روند می‌توان ضرب عدد اول و هفتم را فهمید. در نتیجه چون ضرب هر دو تایی از اعداد اول و ششم و هفتم را داریم می‌توان هرکدام از آنها را بدست آورد. پس چون ضرب دوتایی این اعداد را داریم هر عدد نیز به صورت مستقل بدست خواهد آمد.

۹- گزینه‌ی (ب) درست است.

۳ پرسش لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: فرض کنید بتوان با دو پرسش بتوان این‌کار را انجام داد. در صورتی که هر دو در یک سطر یا ستون باشند، حداقل دو عنصر از یک جایگشت سوال نشده‌اند و در نتیجه مسئله کامل حل نشده است. اگر این دو اشتراکی نداشته باشند، فرض کنید عدد آنها ۲ و ۶ باشند. در این حالت نمی‌توان بقیه‌ی جدول را بصورت یکتا بدست آورد. پس حداقل سه پرسش لازم است.

- اثبات کافی بودن شرط: ابتدا دو خانه از سطر اول را بپرسید. با توجه به این دو، عدد سوم سطر بصورت یکتا مشخص می‌شود (مجموعه‌ی حالات سطرها با یکدیگر در دو عضو اشتراک ندارند.) در نتیجه یک جایگشت و یکی از اعداد یکی از جایگشت‌ها مشخص می‌شود. سپس با پرسیدن یک خانه‌ی دیگر می‌توان عدد دیگر جایگشت را فهمید و در نتیجه تنها عدد باقیمانده نیز بدست می‌آید.

۱۰- گزینه (ب) درست است.

چند جمله‌ای اول را به صورت جزء به جزء در چند جمله‌ای دوم ضرب می‌کنیم و مجموع ضرایب را بررسی می‌کنیم. با ضرب کردن $x^{0}$ به تمام ضرایب $x^{0}$ تا $x^{20}$ یک واحد اضافه می‌شود که در مجموع به تمام ضرایب ۲۱ واحد اضافه می‌شود و با ضرب کردن $-x^{1}$ از تمام ضرایب $x^{1}$ تا $x^{21}$ یک واحد کم می‌شود پس در کل ۲۱ واحد از ضرایب کم می‌شود به همین روال هر دو ضریب متوالی مجموع ضرایب را ۰ نگه می‌دارند و $x^{20}$ با ضرب شدنش در جمله‌ی دوم مجموع ضرایب را ۲۱ واحد اضافه می‌کند که باقیمانده‌ی این عدد بر ۵ برابر ۱ می‌باشد.

۱۱- گزینه (ه) درست است.

تعداد تک‌رقمی‌های زوج ۴ تا، دو رقمی زوج ۵ × ۹ تا و سه رقمی زوج ۵ × ۸۹ تا می‌باشد. در مجموع تعداد کل ارقام تا اینجا برابر است با:

۴ + ۴۵ × ۲ + ۴۴۵ × ۳ = ۱۴۲۹

که ۴۱ واحد بزرگتر از ۱۳۸۸ است. ۴۱ تقسیم بر سه برابر ۱۳ و باقیمانده‌اش ۲ می‌شود. یعنی باید ۱۳ عدد زوج از بزرگترین عدد سه رقمی عقب بیابیم که فرمی به صورت **۹ دارد و چون باقیمانده بر ۳ برابر ۲ شد و از آخر در حال پیشروی هستیم با ارزش‌ترین رقم‌اش را نگاه می‌کنیم که برابر ۹ می‌باشد.

۱۲- گزینه (د) درست است.

مستقل از ترتیب انتخاب گوشت‌ها با تکه گوشت اولیه‌ای که بزرگترین توان ۲اش $k$ باشد. $K+1$ روز زنده می‌ماند. پس ترتیب خورده شدن گوشت‌ها هیچ تاثیری در تعداد روزهای زنده ماندن خرس ندارد.

شمارش را اینگونه انجام می‌دهیم: ۸۸ تکه گوشت اولیه داریم، به علاوه‌ی $\left\lfloor \frac{۸۸}{۲} \right\rfloor$ که تعداد گوشت‌های مضرب ۲ هستند که نصف آنها در ابتدا خورده و نصف آنها باقیمانده، به علاوه‌ی $\left\lfloor \frac{۸۸}{۲} \right\rfloor$ که تعداد گوشت‌های مضرب ۴ هستند که دوبار نصف شده‌اند و هنوز باقیمانده‌اند و به همین ترتیب تا تمامی گوشت‌ها تمام شوند که در نهایت برابر است با :

۸۸ + ۴۴ + ۲۲ + ۱۱ + ۵ + ۲+ ۱ = ۱۷۳

۱۳- گزینه (ه) درست است.

| | | |
|---|---|---|
| ۶ | ۱ | |
| | ۲ | ۳ |
| ۵ | | ۴ |

مجموع اعداد ۱ تا ۹ برابر ۴۵ است. حال اگر بخواهیم مجموع سطرها برابر شوند جمع اعداد هر سطر باید ۱۵ شود. عددی که در گوشه‌ی بالا سمت چپ قرار می‌گیرد هم در یک سطر و هم یک ستون و هم یک قطر شمرده می‌شود که هیچکدام از خانه‌هایشان جز همین خانه با یکدیگر اشتراک ندارند که در کل ۶ خانه هستند. اگر بخواهیم بیشینه‌ی جمع دوبدوی این ۶ خانه‌ی متفاوت کمینه شود به هرگونه که این ۶ خانه را پر کنیم مجموع کمینه‌ی ۳ جفت، ۷ می‌شود که چون مجموع هر سطر یا ستون یا قطر برابر ۱۵ می‌باشد تنها عددی که نمی‌تواند در جایگاه گفته شده قرار گیرد ۹ می‌باشد که جمعش با ۷ بیشتر از ۱۵ است.

۱۴- **گزینه (ه) درست است.**

مجموع جریان در بین شهرها برای ایجاد پایداری باید صفر باشد. پس مجموع قدرت شهرها باید صفر شود و در نتیجه به پیمانه‌ی ۱۱ هم صفر خواهد شد. مجموع چهار شهر اولیه به پیمانه‌ی ۱۱ برابر ۹ می‌باشد. پس شهر آخر قدرت‌اش به پیمانه ۱۱ باید برابر ۹- یا ۲ باشد که مجموع صفر شود که از بین گزینه‌ها فقط ۹۰۰۰ باقی مانده‌اش بر ۱۱ برابر ۲ است.

۱۵- **گزینه (ه) درست است.**

در شلیک اول به احتمال $\frac{۳}{۷}$ می‌میرد و به احتمال $\frac{۴}{۷}$ زنده می‌ماند. حال چون پیاپی شلیک کرده است. خشاب یکی به جلو رفته است و ۳ گلوله و ۶ جای گلوله مانده و احتمال زنده ماندنش در شلیک دوم برابر $\frac{۳}{۶}$ می‌باشد. پس احتمال کل زنده ماندنش در این دو شلیک برابر $\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۷}$ یعنی $\frac{۲}{۷}$ می‌باشد.

۱۶- **گزینه (الف) درست است.**

به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$۱۰۰۰۰۰۱۰ \xrightarrow{\text{Not}} ۱۰۰۰۰۰۱۱ \xrightarrow{\text{Shift}} ۱۱۰۰۰۰۰۱ \xrightarrow{\text{Shift}}$$

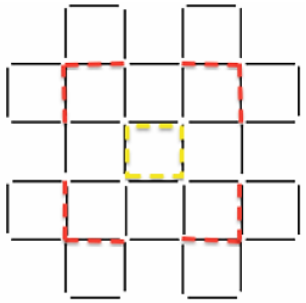
$$\xrightarrow{} ۱۱۱۰۰۰۰۰ \xrightarrow{\text{Not}} ۱۱۱۰۰۰۰۱ \xrightarrow{\text{Shift}} ۱۱۱۱۰۰۰۰$$

با ۵ بار انجام عملیات به خواسته‌ی خود رسیدیم و گزینه‌ی کمتر از آن هم وجود ندارد.

۱۷- این الگوریتم تا زمانی که $A[i]$ برابر $i$ نشده است تمام اعضای آرایه را در گام‌های اول تا سوم به صورت دوری (به دلیل متفاوت بودن همه اعداد با شماره‌ی خانه‌هایشان) بر روی $A[i]$ قرار می‌دهد تا برابر $i$ شود و در گام‌های چهارم و پنجم به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رود و همین کار را تکرار می‌کند تا به آخرین خانه برسد و سپس آرایه را چاپ می‌کند که باعث می‌شود به ازای هر $۱ \le i \le ۸$ تساوی $A[i] = i$ برقرار شود. بنابراین آرایه به صورت (۱,۲,...,۸) مرتب شده می‌باشد.

۱۸- **گزینه (ج) درست است.**

برای دیده نشدن ۸ مربع محیطی برای هرکدام برداشتن حداقل یک چوب لازم است که بهتر است آن را از ضلعی که به سمت داخل شکل است برداریم تا مربع‌های داخلی هم خراب شوند. حال از شکل فقط ۵ مربع وسطی باقیمانده‌اند که برای خراب کردن آنها هم برداشتن ۴ چوب کبریت لازم است که در مجموع ۱۲ چوب کبریت باید برداشت.



۱۹- گزینه (ب) درست است.

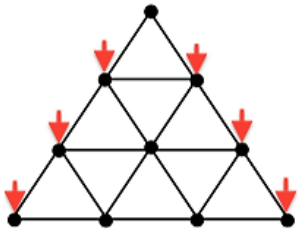
اگر آرایه صفر غالب باشد حداکثر ۱۰٪ آن یعنی ۱۰۰ تا یک و اگر ۱- غالب باشد حداکثر ۱۰۰ تا صفر دارد. حال چون می‌دانیم آرایه با ۰- غالب است و یا ۱- غالب اگر در بررسی‌مان از هرکدام از صفرها یا یک‌ها بیشتر از ۱۰۰ تا داشته باشیم می‌توانیم با قطعیت بگوییم که آن غالب است. پس در بدترین شرایط ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱ یعنی ۲۰۱ بررسی لازم داریم.

۲۰- گزینه (ج) درست است.

توجه داشته باشید که مثلث متساوی الاضلاع می‌تواند به هر طول ضلعی و هر زاویه‌ای تشکیل شود و لزومی ندارد که موازی خطوط باشد. می‌دانیم از هر مثلث به طول یک در گوشه‌های مثلث بزرگ، یک نقطه نباید انتخاب شود. در نتیجه جواب حداکثر ۷ خواهد بود.

ثابت می‌کنیم جواب برابر ۷ نیز نمی‌تواند باشد: فرض کنید ۷ نقطه انتخاب کرده‌ایم. طبق فرض بالا نقطه‌ی وسط مثلث انتخاب شده است. حال ۶ نقطه‌ی اطراف آن را در نظر بگیرید. اگر ۴ نقطه در بین آنها انتخاب شده باشد دو نقطه یافت می‌شود که مجاور باشند و با نقطه‌ی وسط تشکیل مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند. پس حداکثر ۳ نقطه از بین آنها انتخاب شده است. حال از ۳نقطه‌ی گوشه نیز باید حداکثر دو نقطه انتخاب شود. در نتیجه حداکثر ۶ نقطه انتخاب شد.

برای ۶ نقطه نیز مثال زیر وجود دارد:



۲۱- گزینه (الف) درست است.

در ابتدا با ۳ مقایسه‌ی دوبدوی اعداد، سه عدد بزرگتر و سه عدد کوچکتر را تشخیص می‌دهیم و آنها را از هم جدا می‌کنیم. حال از بین ۳ عدد بزرگتر با دو مقایسه بزرگترین و از بین ۳ عدد کوچکتر نیز با دو مقایسه کوچکترین را پیدا می‌کنیم که در مجموع با ۷ مقایسه به هدف‌مان رسیدیم که کوچکترین عدد در بین گزینه‌ها است.

۲۲- گزینه (ج) درست است.

می‌دانیم عدد ۲ کوچکترین عدد در بین اعداد است، در نتیجه همواره عنصر کوچکتر است. بدین ترتیب از مرحله‌ی اول به بعد همواره در جایگاه‌های زوج باقی خواهد ماند و همواره دو خانه نسبت به قبل عقب‌تر خواهد رفت. در مرحله‌ی اول در خانه‌ی ششم قرار دارد و با توجه به اینکه ۱۳۸۸ باقیمانده‌اش بر ۳ برابر با ۲ است در آخرین مرحله در خانه‌ی چهارم قرار می‌گیرد (هر سه مرحله به جایگاه قبلیش بر می‌گردد).

۲۳- گزینه (ب) درست است.

دنباله‌ی اول قابل تولید نیست. زیرا باید از قطار ۱۰ تا قطار ۵ وارد پارکینگ شوند و قطار ۵ خارج شود و سپس قطارهای ۴ تا ۱ وارد پارکینگ شوند و از آن طرف ۱ تا ۳ خارج شوند. ولی قطار ۴ هنوز خارج نشده است و قطار ۶ نمی‌تواند قبل از آن به خروجی رود.

دنباله‌ی دوم قابل تولید نیست زیرا قطار شماره‌ی ۴ ندارد و دو تا ۹ دارد.

دنباله‌ی سوم هم قابل تولید نیست. زیرا باید قطارهای ۱۰ تا ۲ به ترتیب وارد پارکینگ بشوند و سپس قطار ۲ خارج شود ولی بعد از آن قطار شماره ۹ نمی‌تواند خارج شود.

دنباله‌ی چهارم قابل تولید است. ابتدا قطارهای ۱۰ تا ۴ وارد پارکینگ می‌شوند. سپس قطار ۴ خارج می‌شود و قطارهای ۳ و ۲ وارد می‌شوند و قطار ۲ و ۳ خارج می‌شوند و بعد از آن قطار ۵ تا ۷ که از قبل در پارکینگ بودند خارج خواهند شد و بعد از آن قطار ۱ وارد و خارج می‌شود و در نهایت هم قطارهای ۸ تا ۱۰ خارج می‌شوند.

۲۴- گزینه‌ی (الف) درست است.

گراف جایگشت متناسب با عملگرها را می‌کشیم و مکان‌هایی را که ۲ را بتوان به آنجا منتقل کرد می‌یابیم. اعداد طلایی برابر ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند که با هم یک دور را تشکیل داده‌اند.

۲۵- گزینه‌ی (د) درست است.

برای اینکه فاصله‌اش از نقطه A بیشتر از ۳ واحد شود یا باید بیشتر از ۵ حرکت راست رفته باشد یا باید بیشتر ار ۵ حرکت چپ رفته باشد. در واقع احتمال حالاتی را که ۶ یا ۷ یا صفر یا یک بار راست رفته را باید بدست آوریم تا احتمال کل را حساب کنیم.

$$\text{احتمال صفر بار راست رفتن} = \frac{۱}{۱۲۸}$$

$$\text{احتمال یک بار راست رفتن} = \binom{۷}{۱} \times \frac{۱}{۱۲۸}$$

$$\text{احتمال شش بار راست رفتن} = \binom{۷}{۶} \times \frac{۱}{۱۲۸}$$

$$\text{احتمال هفت بار راست رفتن} = \frac{۱}{۱۲۸}$$

که در مجموع برابر $\frac{۱۶}{۱۲۸}$ یا $\frac{۱}{۸}$ می‌باشد.